ZORRO

Profesor
Edson Curahua

GEOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

PITAGORAS ACADEMIA

CLASE 06: RELAC. MÈTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS

PROYECCIÓN ORTOGONAL

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

PROPIEDADES

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

+ PROPIEDADES

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

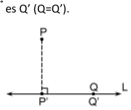
PROYECCIÓN OORTOGONAL

PROYECCIONES

Se llama proyección ortogonal de un punto sobre una recta, al pie de la perpendicular bajada del punto a la recta. Así, la proyección ortogonal del punto P sobre la recta $\overleftrightarrow{L}$ es el punto P'.

La perpendicular $\overline{PP'}$ se llama proyectante y la recta $\overleftrightarrow{L}$ recibe el nombre de eje de proyección.

Si el punto pertenece a la recta, su proyección sobre ella es el mismo punto. Así, la proyección de Q sobre $\overleftrightarrow{L}$ es Q' (Q=Q').



En la figura:

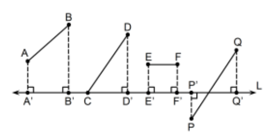
$$P' = \mathrm{Proy}_{\overleftrightarrow{L}}P$$

que se lee: P' es la proyección de P sobre $\overleftrightarrow{L}$.

La proyección de un segmento sobre una recta es otro segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento dado.

Si el segmento dado es oblicuo a la recta $\overleftrightarrow{L}$, la proyección es menor que el segmento; si el segmento es paralelo a la recta su proyección es congruente a él y si el segmento es perpendicular a la recta su proyección se reduce a un punto.

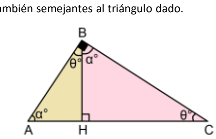
PROYECCIÓN OORTOGONAL



Así en la figura tenemos que $\overline{A'B'}$, $\overline{CD'}$, $\overline{E'F'}$ y $\overline{P'Q'}$ son proyecciones de $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ y $\overline{PQ}$, respectivamente, sobre la recta L.

SEMEJANZAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

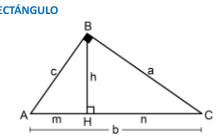
Teorema: En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos semejantes entre sí y también semejantes al triángulo dado.



$$\Delta AHB \sim \Delta BHC \sim \Delta ABC$$

R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

RELCIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



En todo triángulo rectángulo se verifica que:

01. Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ésta.

$$c^2 = bm \qquad a^2 = bn$$

02. **Teorema de Pitágoras**: La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$c^2 + b^2 = a^2$$

03. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$h^2 = mn$$

R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

04. La altura correspondiente a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.

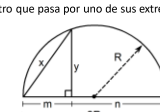
$$ca = bh$$

05. La suma de las inversas de los cuadrados de los catetos es igual al inverso del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa.

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}$$

TEOREMAS

01. Toda cuerda es media proporcional entre el diámetro y la proyección de la cuerda sobre el diámetro que pasa por uno de sus extremos.



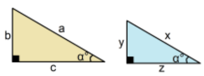
$$x^2 = 2Rm$$

Además:

$$y^2 = mn$$

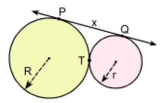
R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

02. **Teorema de Dostor**: En dos triángulos rectángulos semejantes, el producto de las hipotenusas es igual a la suma de los productos de los catetos homólogos.



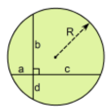
$ax = by + cz$

03. Cálculo del segmento tangente común exterior a dos circunferencias tangentes exteriores.



$x = 2\sqrt{Rr}$

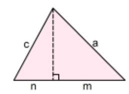
04. **Teorema de Faure**



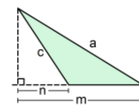
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$

R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

05. **Teorema de las proyecciones**: En todo triángulo la diferencia de los cuadrados de dos lados es igual a la diferencia de los cuadrados de sus respectivas proyecciones sobre el tercero.

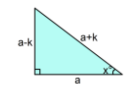


$a^2 - c^2 = m^2 - n^2$



$a^2 - c^2 = m^2 - n^2$

NOTA



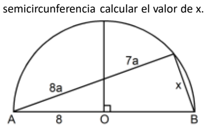
$a = 4k$

$x = 37$

R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Ejemplo 01:

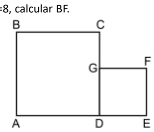
En la semicircunferencia calcular el valor de x.



A) 4 B) 3 C) 6
D) 8 E) 5

Ejemplo 02:

En la figura ABCD y DEFG son cuadrados. Si $AB^2+EF^2=8$, calcular BF.



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) 6 E) 8

R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

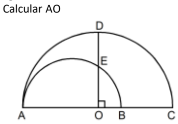
Ejemplo 03:

Calcular la medida del radio de la circunferencia inscrita en un trapecio isósceles cuyas bases miden 8 y 18.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

Ejemplo 04:

En la figura O es centro, $\overline{AB}$ es diámetro, DE=3 y BC=4. Calcular AO



A) 3,5 B) 4,5 C) 5
D) 5,5 E) 6

R. M. EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Ejemplo 05:

En un trapecio, de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, BC=7 y AD=18. Si las diagonales se intersecan perpendicularmente y AH=2, calcular la medida de la altura $\overline{BH}$.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

Ejemplo 06:

ABCD es un rectángulo y P es un punto interior, tal que AP=3, PB=4 y PC=5. Calcular PD:

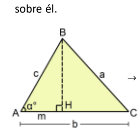
A) 6 B) 3,5 C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) 4,5

R. M. EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

TEOREMAS DE EUCLIDES

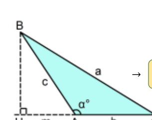
1er Teorema: En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



Si $\alpha < 90$

$\rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$

2do Teorema: En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



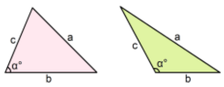
Si $\alpha > 90$

$\rightarrow$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

R. M. EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

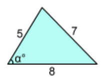
TEOREMA DEL COSENO

En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos dos lados multiplicado por el coseno del ángulo comprendido.

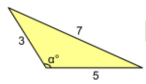


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha°$$

NOTAS



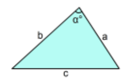
α=60



α=120

R. M. EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

RECONOCIMIENTO DEL TIPO DE TRIÁNGULO



Sea "c" el lado mayor:

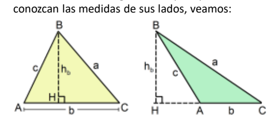
Si: $c^2 < a^2 + b^2$ entonces α < 90, es decir el triángulo es acutángulo.

Si: $c^2 = a^2 + b^2$ entonces α = 90, es decir el triángulo es rectángulo.

Si: $c^2 > a^2 + b^2$ entonces α > 90, es decir el triángulo es obtusángulo.

TEOREMA DE HERÓN

Se utiliza para calcular la medida de una de las alturas de un triángulo, siempre y cuando se conozcan las medidas de sus lados, veamos:



Si $\overline{BH}$ es altura, entonces:

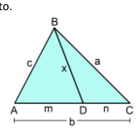
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde: $p = \frac{a+b+c}{2}$

R. M. EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

TEOREMA DE STEWART

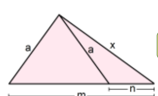
Se utiliza para calcular la medida de una ceviana, si se conocen los lados del triángulo y los segmentos determinados por dicha ceviana en el lado opuesto.



$$c^2n + a^2m = x^2b + mnb$$

CONSECUENCIAS

$$a^2 = x^2 + mn$$

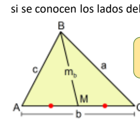


$$a^2 = x^2 - mn$$

R. M. EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

TEOREMA DE LA MEDIANA

Se utiliza para calcular la medida de una mediana, si se conocen los lados del triángulo.



$$c^2 + a^2 = 2(m_b)^2 + \frac{b^2}{2}$$

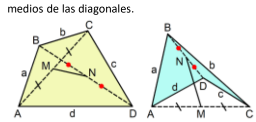
TEOREMA DE BOOTH

En todo triángulo la suma de los cuadrados de las medianas es a la suma de los cuadrados de los lados, como 3 es a 4.

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

TEOREMA DE EULER

En todo cuadrilátero la suma de los cuadrados de los cuatro lados es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales, más el cuádruplo del cuadrado del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



$\forall$☐ABCD, donde M es punto medio de $\overline{AC}$ y N es punto medio de $\overline{BD}$.

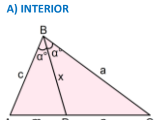
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

R. M. EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

SEGUNDOS TEOREMAS DE LA BISECTRIZ

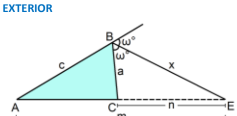
Los utilizaremos para calcular la medida de cualquier bisectriz en el triángulo, se recomienda utilizar también los primeros teoremas. Se presentan dos casos:

A) INTERIOR



$$x^2 = ca - mn$$

B) EXTERIOR

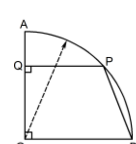


$$x^2 = mn - ca$$

EJEMPLOS

Ejemplo 07:

Calcular PQ, si el radio del cuadrante mide 8 y PB=6.



A) 21/4 B) 23/4 C) 25/4
D) 27/4 E) 29/4

Ejemplo 08:

Se tiene un triángulo ABC tal que: AB=BC=2(AC). Si la distancia de B a la bisectriz interior del ángulo A mide $\sqrt{6}$, calcular AC.

A) 1 B) $\sqrt{6}$ C) 2
D) 3 E) 4

EJEMPLOS

Ejemplo 09:

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a $\overline{AC}$ en D. Calcular BD, si AB=5, BC=7 y AC=6.

A) 5,5 B) 4,5 C) 6
D) 5 E) 4

Ejemplo 10:

Los radios de dos circunferencias miden 7 y 5 y la distancia entre sus centros es 14. Si un punto exterior dista de las dos circunferencias ocho, calcular la distancia de dicho punto a la línea que une los centros.

A) 10 B) $\sqrt{106}$ C) 12
D) $\sqrt{132}$ E) 13,2

EJEMPLOS

Ejemplo 09:

El perímetro de una región triangular es 21 y las longitudes de los lados son números enteros consecutivos. Calcule la longitud de una de las bisectrices interiores si es entera.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

Ejemplo 10:

Las bases de un trapecio miden 4 y 18, además los lados no paralelos miden 13 y 15. Calcular la altura del trapecio.

A) $10\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{5}$ C) $8\sqrt{7}$
D) 12 E) 9

EJEMPLOS

Ejemplo 11:

Se tiene un trapecio cuyas bases miden 1 y 5; los lados no paralelos 2 y 4. Calcular la suma de los cuadrados de las medidas de las diagonales.

A) 28 B) 30 C) 32
D) 35 E) 38

Ejemplo 12:

Sea M el punto medio del lado $\overline{BC}$ de un rombo ABCD, de modo que AM=13 y MD=9. Calcular AD.

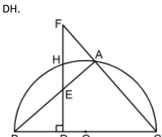
A) 6 B) 5 C) $\sqrt{22}$
D) $\sqrt{19}$ E) 10

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PROBLEMAS RESUELTOS

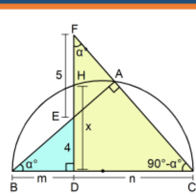
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

01. En la figura mostrada O es centro, DE=4 y EF=5. Calcular DH.



A) $3\sqrt{2}$ B) 4,5 C) $4\sqrt{2}$
D) 6 E) 6,5

Resolución:



Por propiedad: $x^2 = mn \ \dots(1)$

Ahora se observa que los triángulos BDE y FDC son semejantes, luego:

$$\frac{4}{m} = \frac{n}{9} \ \dots(2)$$

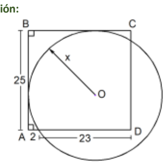
$$\therefore x = 6$$

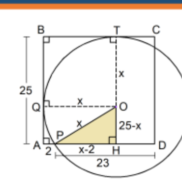
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

02. Una circunferencia es tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y divide a los otros dos lados en segmentos que miden 2 y 23. Calcular la medida del radio de dicha circunferencia.

A) 10 B) 15 C) 17
D) 13 E) 16

Resolución:





Unimos el centro O con los puntos de tangencia y trazamos $\overline{OH} \perp \overline{AD}$, ahora se cumple:

OQ=OP=x, OH=25-x y PH=x-2

En el triángulo rectángulo PHO aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$(x-2)^2+(25-x)^2= x^2$$

$$\therefore x = 17$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

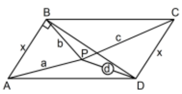
03. En un paralelogramo ABCD (m∠ABD=90), se ubica el punto interior P, tal que $PB^2+PD^2=38$, $PA^2+PC^2=56$, calcular AB.

A) 2 B) 3 C) 4
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{5}$

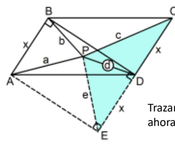
Resolución:

Se pide: AB=x.

Datos: $b^2 + d^2 = 38 \wedge a^2 + c^2 = 56$



Trazamos $\overline{AE}$ perpendicular a $\overline{CD}$, E en la prolongación de $\overline{CD}$, formandose el rectángulo ABDE, entonces: AB = x =DC = ED



Trazamos $\overline{PE}$ (PE=e), ahora tendremos:

- ΔEPC, por teorema de la mediana:

$$e^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{(2x)^2}{2} \text{ ... (1)}$$

- □ABDE, por el teorema de Marlen:

$$a^2 + d^2 = b^2 + e^2 \quad \text{... (2)}$$

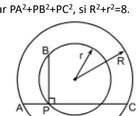
De (1) + (2):

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 + 2x^2$$

$$\therefore x = 3$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

04. Calcular $PA^2+PB^2+PC^2$, si $R^2+r^2=8$.



A) 8 B) 12 C) 16
D) 24 E) 32

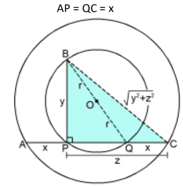
Resolución:

Se pide: $PA^2 + PB^2 + PC^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Dato: $R^2+r^2=8$

Por propiedad en circunferencias concéntricas:

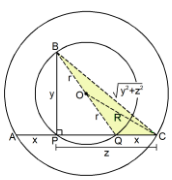
AP = QC = x



Trazamos $\overline{BQ}$, que resulta ser diámetro de la circunferencia menor (BQ = 2r), también trazamos $\overline{OC}$ (OC = R) y $\overline{BC}$. Entonces:

$$BC = \sqrt{y^2 + z^2}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Por último en el triángulo BCQ aplicamos el teorema de la mediana:

$$\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2 + x^2 = 2(R)^2 + \frac{(2r)^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(R^2+r^2)$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

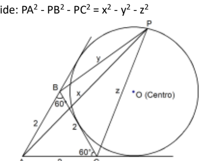
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

05. Se tiene el triángulo equilátero ABC, AB=2, sea P un punto cualquiera de la circunferencia ex-inscrita relativa a $\overline{BC}$. Calcular: $PA^2 - PB^2 - PC^2$.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 1 E) $2\sqrt{2}$

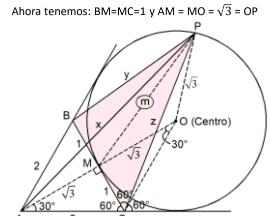
Resolución:

Se pide: $PA^2 - PB^2 - PC^2 = x^2 - y^2 - z^2$

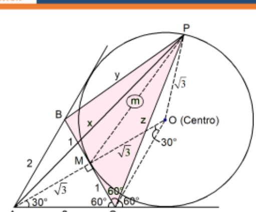


Trazamos $\overline{AO}$, $\overline{CO}$, $\overline{OP}$ y $\overline{PM}$, luego: $\overline{AO} \perp \overline{BC}$ en M y $\overline{CO}$ es bisectriz exterior.

Ahora tenemos: BM=MC=1 y AM = MO = $\sqrt{3}$ = OP



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- ΔAPO, por teorema de la mediana:

$$x^2 + (\sqrt{3})^2 = 2m^2 + \frac{(2\sqrt{3})^2}{2} \text{ ... (1)}$$

- ΔBPC, por teorema de la mediana:

$$y^2 + z^2 = 2m^2 + \frac{(2)^2}{2} \text{ ... (2)}$$

Finalmente de (1) - (2):

$$x^2 - y^2 - z^2=1$$